

ELEMENTOS FINITOS/INFINITOS EM PROBLEMAS DE PERCOLAÇÃO Finite/Infinite Elements in Seepage Problems

JOSÉ COUTO-MARQUES

Professor Associado, FEUP,
Rua do Dr. Roberto Frias, s/n, 4200-465 Porto, jmarques@fe.up.pt

Resumo

Na modelação numérica de problemas de percolação pelo método dos elementos finitos é prática corrente começar por truncar o domínio físico a uma distância considerada suficiente da zona onde se centra a análise, para em seguida se proceder à definição da malha. Esta abordagem tem dois inconvenientes. Por um lado pode-se ser levado a trabalhar com malhas excessivamente extensas, se não se tiver uma ideia do que possa ser uma distância suficiente para realizar a truncatura. Por outro lado as condições aplicadas nas fronteiras artificialmente criadas com este procedimento podem ser elas próprias causadoras de erro na análise numérica. No presente trabalho explora-se o potencial da combinação de elementos finitos com elementos infinitos, mostrando que a sua utilização na fronteira remota da zona em análise vem facultar uma adequada e económica modelação da natureza semi-infinita do domínio e das respetivas condições de fronteira.

Palavras-chave: Percolação, modelação numérica, domínios infinitos.

Abstract

In the numerical modelling of seepage problems by the finite element method the usual procedure is to start by truncating the physical domain at a location considered sufficiently distant from the zone where the analysis is focused and only then proceed with mesh definition. This approach has two drawbacks. The first is that one may end up having to deal with excessively large meshes, if there is not a clear idea of what may be an adequate distance for performing truncation. On the other hand the conditions applied at the boundaries artificially created with this procedure may be themselves a source of error in the numerical analysis. The present work explores the potential of the combination of finite elements with infinite elements, showing that the use of the latter in the far field provides an accurate and economical modelling of the unbounded nature of the domain and of the corresponding boundary conditions.

Keywords: Groundwater flow, numerical modelling, unbounded domains.

1. Introdução

Nos problemas geotécnicos em geral e nos de percolação em particular o domínio físico que os enquadra apresenta em regra grandes dimensões em planta. Já na direção vertical é frequente o aparecimento a maior ou menor profundidade de uma camada de reduzida permeabilidade, por exemplo com as características de um extrato rochoso, que delimita inferiormente a zona onde a percolação é significativa e identifica de forma natural a localização de uma condição de fronteira impermeável.

Ao aplicar o método dos elementos finitos em situações deste tipo, em que na direção horizontal o domínio se estende indefinidamente, é habitual recorrer à sua truncatura introduzindo fronteiras verticais situadas a uma distância considerada suficiente da zona onde se centra a análise.

Dado que a estas fronteiras artificiais resultantes da truncatura estão associadas a condições de impermeabilidade, podem daí advir efeitos indesejáveis que conduzem a resultados errados no estabelecimento da rede de escoamento.

Como exemplo, considere-se o problema clássico da percolação em regime permanente em torno de uma cortina de estacas-prancha ilustrada na Figura 1 (Lambe e Whitman, 1968). A camada de solo apresenta isotropia de permeabilidade, com $k_x=k_y=5 \times 10^{-9}$ m/s, pelo que as linhas de corrente são normais às equipotenciais. O caudal percolado sob a cortina é de $18,75 \times 10^{-9}$ m³/s por metro de desenvolvimento da mesma.

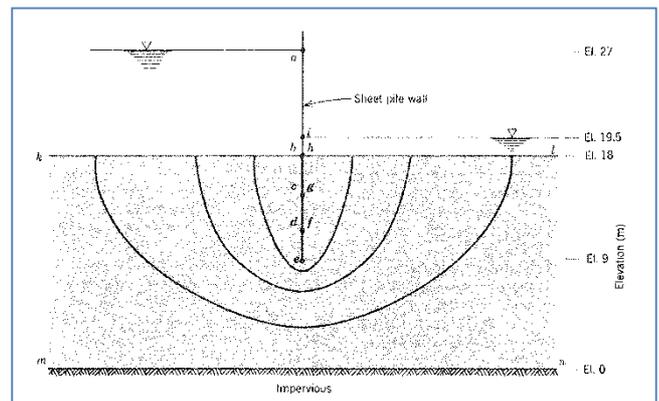


Figura 1. Rede de escoamento em torno de uma cortina de estacas-prancha (Lambe e Whitman, 1968).

Analise-se este problema com a malha de elementos finitos da Figura 2, na qual estão assinaladas a amarelo as fronteiras impermeáveis, uma horizontal, no contacto com o substrato rochoso, e duas verticais resultantes da truncatura do domínio à esquerda e à direita.

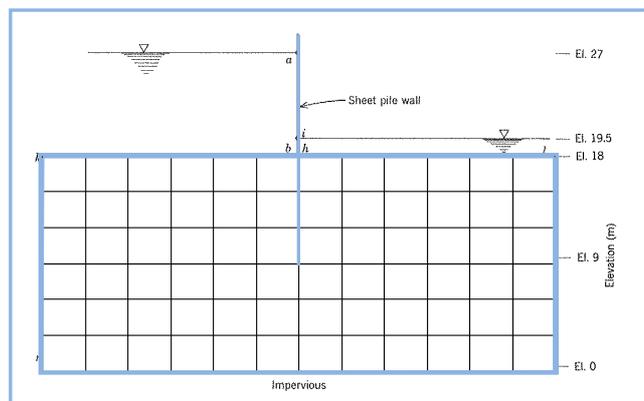


Figura 2. Malha de elementos finitos de 8 nós.

A rede de escoamento obtida está ilustrada na Figura 3, com as linhas de corrente representadas a azul e as equipotenciais a vermelho. Os contornos verticais laterais coincidem com linhas de corrente uma vez que são fronteiras impermeáveis resultantes da truncatura do domínio, o que provoca a inflexão de duas linhas equipotenciais que terminam perpendiculares às fronteiras laterais, dada a já referida isotropia de permeabilidade. A comparação das Figuras 1 e 3 torna bem patentes as consequências do limite abrupto do domínio e das condições impostas na fronteira criada por esta via.

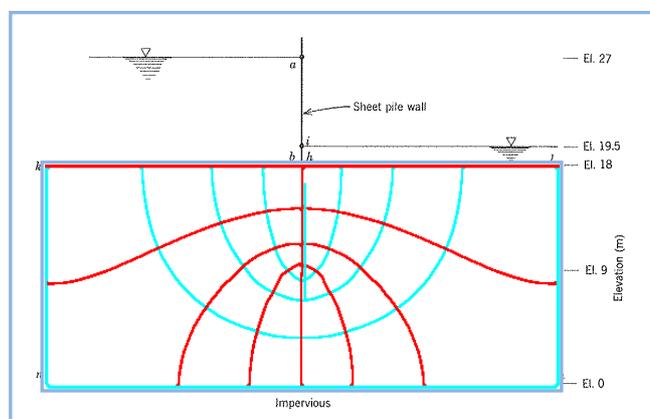


Figura 3. Rede de escoamento obtida com uma malha constituída apenas por elementos finitos.

É óbvio que os resultados poderiam ser melhorados se a malha de elementos finitos da Figura 2 se estendesse na horizontal outro tanto para cada lado. Todavia importa referir que há situações em que, seja pelas características de novidade ou de responsabilidade do problema, seja pela falta de termos de comparação baseados em experiência anterior por parte de quem utiliza as ferramentas numéricas de análise, pode acabar por ter que se recorrer a malhas de elementos finitos excessivamente extensas com o objetivo de colocar a truncatura do domínio suficientemente longe da zona onde se centra o estudo, sem que se tenha uma noção clara de qual poderá ou deverá ser a dimensão a dar à malha para evitar resultados menos fiáveis por via de efeitos como os acima ilustrados.

A utilização combinada de elementos finitos com elementos infinitos, cuja função é precisamente modelar a fronteira remota, permite dar uma resposta económica e rigorosa a este tipo de situações.

2. Elementos Infinitos

2.1. Elemento infinito unidimensional de 2 nós

Os elementos infinitos utilizados neste trabalho, os chamados "mapped infinite elements" (Zienkiewicz *et al.*, 1983; Marques e Owen, 1984), consistem numa evolução dos elementos isoparmétricos em que se faz a utilização conjugada de dois tipos diferentes de funções de interpolação, um para a geometria (as funções de "mapping" M), outro para a variável de campo (as funções de forma N).

As funções de mapeamento da geometria incluem uma singularidade que permite estabelecer a correspondência entre as dimensões limitadas do elemento no sistema de coordenadas locais e a sua extensão semi-infinita em coordenadas globais.

Os aspetos fundamentais da conceção deste tipo de elemento podem ser ilustrados com um exemplo unidimensional, Figura 4.

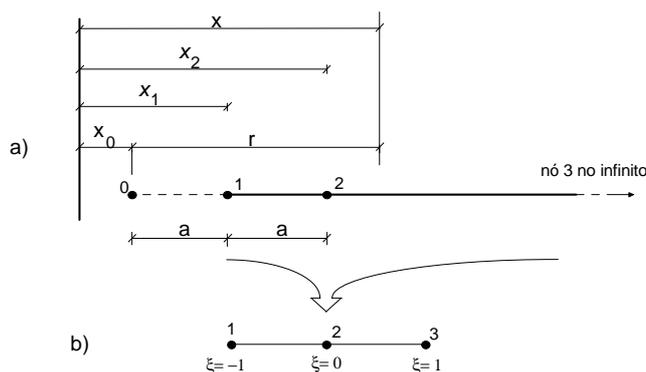


Figura 4. Elemento infinito unidimensional: a) Coordenadas globais, b) Coordenadas locais.

O mapeamento da geometria do elemento entre as coordenadas locais $\xi \in [-1, +1]$ e as globais $x \in [x_1, +\infty[$ é realizado por meio de

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 M_i(\xi) \cdot x_i \quad [1]$$

sendo as funções M dadas por

$$M_1(\xi) = -2\xi / (1 - \xi) \quad [2]$$

$$M_2(\xi) = (1 + \xi) / (1 - \xi) \quad [3]$$

Note-se que para $\xi = +1$ se tem $x = \infty$ e que o somatório em [1] se estende apenas aos nós "finitos".

Além disso a soma de M_1 e M_2 é igual à unidade, o que garante a independência do mapeamento em relação à escolha da origem do referencial x .

O ponto O da Figura 4, o chamado polo, é posicionado arbitrariamente com $x_0 < x_1$ e serve para definir a abcissa do nó 2, cuja distância ao polo é dupla da do nó 1.

As funções N de interpolação da variável de campo ϕ são dadas por

$$N_1(\xi) = \xi(\xi - 1)/2 \quad [4]$$

$$N_2(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi) \quad [5]$$

$$N_3(\xi) = \xi(\xi + 1)/2 \quad [6]$$

tendo-se

$$\phi(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \cdot \phi_i \quad [7]$$

Resolvendo a equação [1] em ordem a ξ obtém-se,

$$\xi = 1 - 2a/r \quad [8]$$

em que r representa a distância de um ponto genérico ao polo e $a = x_2 - x_1$.

Substituindo [8] em [7] conclui-se que a variação da variável de campo ϕ em função da distância r ao polo é dada por,

$$\phi = \phi_3 + (-\phi_1 + 4\phi_2 - 3\phi_3)a/r + (2\phi_1 - 4\phi_2 + 2\phi_3)a^2/r^2 \quad [9]$$

Quando r tende para infinito ϕ tende para ϕ_3 . A precisão com que as expressões [7] ou [9] aproximam a evolução da variável de campo ϕ pode ser aumentada com a inclusão de termos de ordem mais elevada na expansão polinomial.

2.2. Elemento infinito bidimensional de 5 nós

As funções M de mapeamento da geometria do elemento infinito de 5 nós (Figura 5) são dadas por

$$M_1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(-1 - \xi - \eta)/(1 - \eta) \quad [10]$$

$$M_2(\xi, \eta) = 2(1 - \xi^2)/(1 - \eta) \quad [11]$$

$$M_3(\xi, \eta) = (1 + \xi)(-1 + \xi - \eta)/(1 - \eta) \quad [12]$$

$$M_4(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta)/[2(1 - \eta)] \quad [13]$$

$$M_5(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 + \eta)/[2(1 - \eta)] \quad [14]$$

e satisfazem a condição de terem soma unitária.

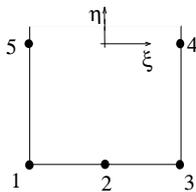


Figura 5. Elemento infinito de 5 nós.

As funções de forma N são extraídas do elemento finito de 8 nós:

$$N_1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta)/4 \quad [15]$$

$$N_2(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2 \quad [16]$$

$$N_3(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta)/4 \quad [17]$$

$$N_4(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 - \eta^2)/2 \quad [18]$$

$$N_5(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2 \quad [19]$$

As funções M de mapeamento da geometria do elemento infinito de 5 nós são derivadas através de um processo análogo àquele que permite obter as funções de interpolação N do elemento finito "Serendipity" de 8 nós. Pode-se considerar que aquele elemento tem 5 nós "finitos" e 3 nós no infinito (ou seja, nos pontos com coordenada local $\eta=+1$). É pelos 3 nós do lado com $\eta=-1$ que é realizada a ligação com o contorno da malha de elementos finitos que discretiza a zona próxima do domínio.

3. Exemplos de Aplicação

3.1. Percolação em torno de uma cortina

O problema da percolação em regime permanente em torno de uma cortina de estacas-prancha descrito na Introdução (Figura 1) será agora resolvido através de uma malha que conjuga elementos finitos de 8 nós, com a configuração da Figura 2, com 6+6 elementos infinitos de 5 nós acoplados às fronteiras verticais direita e esquerda, que modelam a continuação do domínio para infinito na direção horizontal (Figura 6).

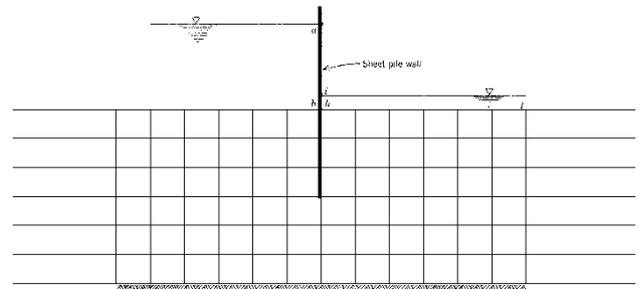


Figura 6. Malha de elementos finitos e infinitos.

A rede de escoamento assim obtida, patente na Figura 7, já não apresenta as anomalias detetadas na Figura 3 e é comparável favoravelmente com a solução de referência (Figura 1).

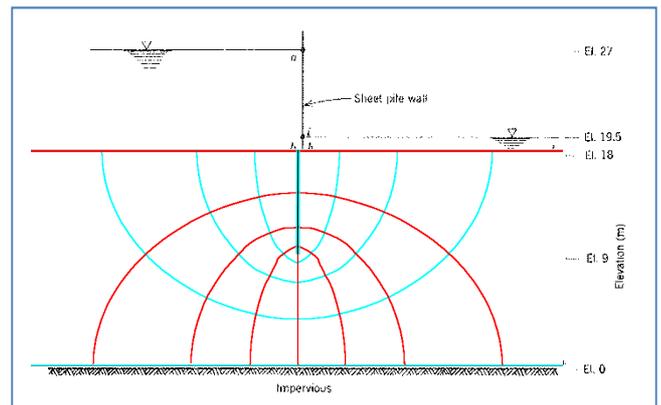


Figura 7. Rede de escoamento obtida com uma malha de elementos finitos e infinitos.

3.2. Percolação sob uma barragem de betão

A Figura 8 apresenta a rede de escoamento correspondente à percolação através do terreno de fundação de uma barragem de betão (Lambe e Whitman, 1968). O solo apresenta isotropia de permeabilidade com $k=5 \times 10^{-4}$ m/s.

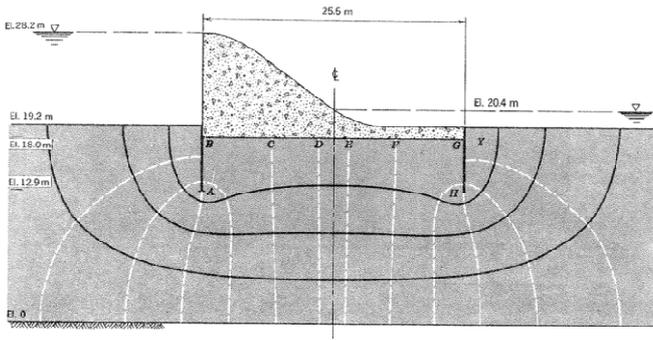


Figura 8. Rede de escoamento sob uma barragem de betão (Lambe e Whitman, 1968).

A Figura 9 mostra a rede de escoamento obtida com uma malha de elementos finitos de 8 nós cuja largura coincide com a da zona do domínio patente na Figura 8.

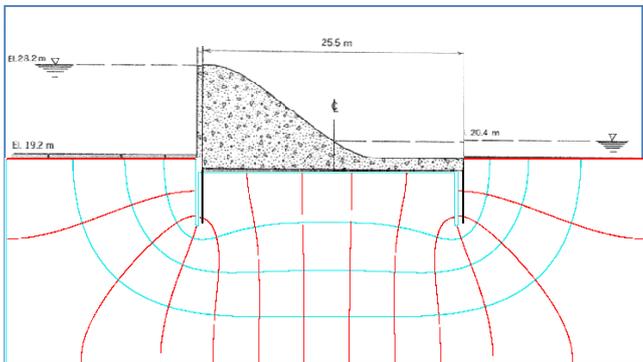


Figura 9. Rede de escoamento sob uma barragem de betão obtida com uma malha constituída apenas por elementos finitos.

As fronteiras verticais da malha resultantes da truncatura do domínio dos lados de montante e jusante têm associada uma condição de impermeabilidade, constituindo por esse motivo linhas de corrente, já que apenas a componente tangencial da velocidade de percolação é não nula. Daí a inflexão observada nas segunda e penúltima linhas equipotenciais, Figura 9.

Ao ter em linha de conta na modelação numérica a continuação horizontal do domínio através da conjugação de elementos finitos no campo próximo com elementos infinitos no campo remoto ultrapassam-se as dificuldades assinaladas, obtendo-se um resultado para a rede de escoamento, Figura 10, que é compatível com a solução de referência.

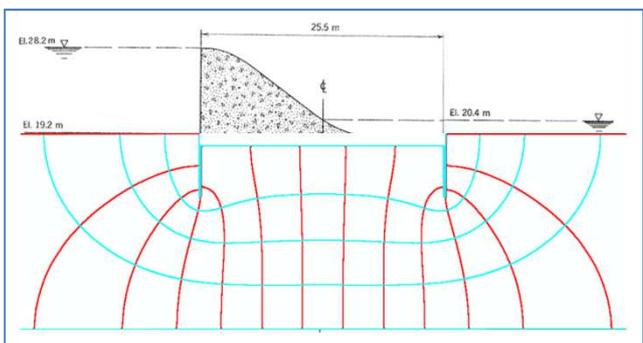


Figura 10. Rede de escoamento sob uma barragem de betão obtida com uma malha de elementos finitos e infinitos.

4. Considerações Finais

A utilização de ferramentas numéricas de modelação já é corrente em muitas áreas tradicionais de Engenharia e tem-se alargado e contribuído para o desenvolvimento de outras mais recentes, como por exemplo as que resultam da interação com a Medicina, como é o caso da Bioengenharia.

Em muitos destes casos os problemas a analisar, apesar de eventualmente complexos, são passíveis de inclusão integral no modelo numérico de elementos finitos. Pense-se por exemplo na simulação computacional de "crash tests" na indústria automóvel.

Persistem todavia situações em que é incomportável a integração de todo o domínio físico no modelo numérico de análise. Casos com estas características são abundantes naquelas áreas da Engenharia Civil em que existe forte interação com o terreno, como a Geotecnia e a Hidráulica.

Os exemplos incluídos neste trabalho são ilustrativos do papel que a utilização conjugada de elementos finitos e infinitos pode desempenhar na obtenção de soluções simultaneamente económicas e rigorosas. Esta circunstância é particularmente valiosa naquelas situações em que a grande extensão do domínio físico de análise, em comparação com a zona onde se focaliza o problema em estudo, impõe medidas para reduzir o volume de cálculo através de uma redução criteriosa da zona a discretizar, mas exige garantias de qualidade na definição das condições de fronteira.

Referências

- Lambe, T. W., Whitman, R.V. (1968). *Soil Mechanics, SI version*, John Wiley & Sons, New York, 553 páginas. ISBN 0-471-02491-0.
- Marques, J. M. M. C., Owen, D. R. J. (1984). *Infinite elements in quasistatic materially nonlinear problems*, Computers & Structures, 18, 739-751. ISSN 0045-7949.
- Zienkiewicz, O. C., Emson, E., Bettess, P. (1983). *A novel boundary infinite element*, Int. J. Num. Meth. Eng., 19, 393-404. ISSN 0029-5981.